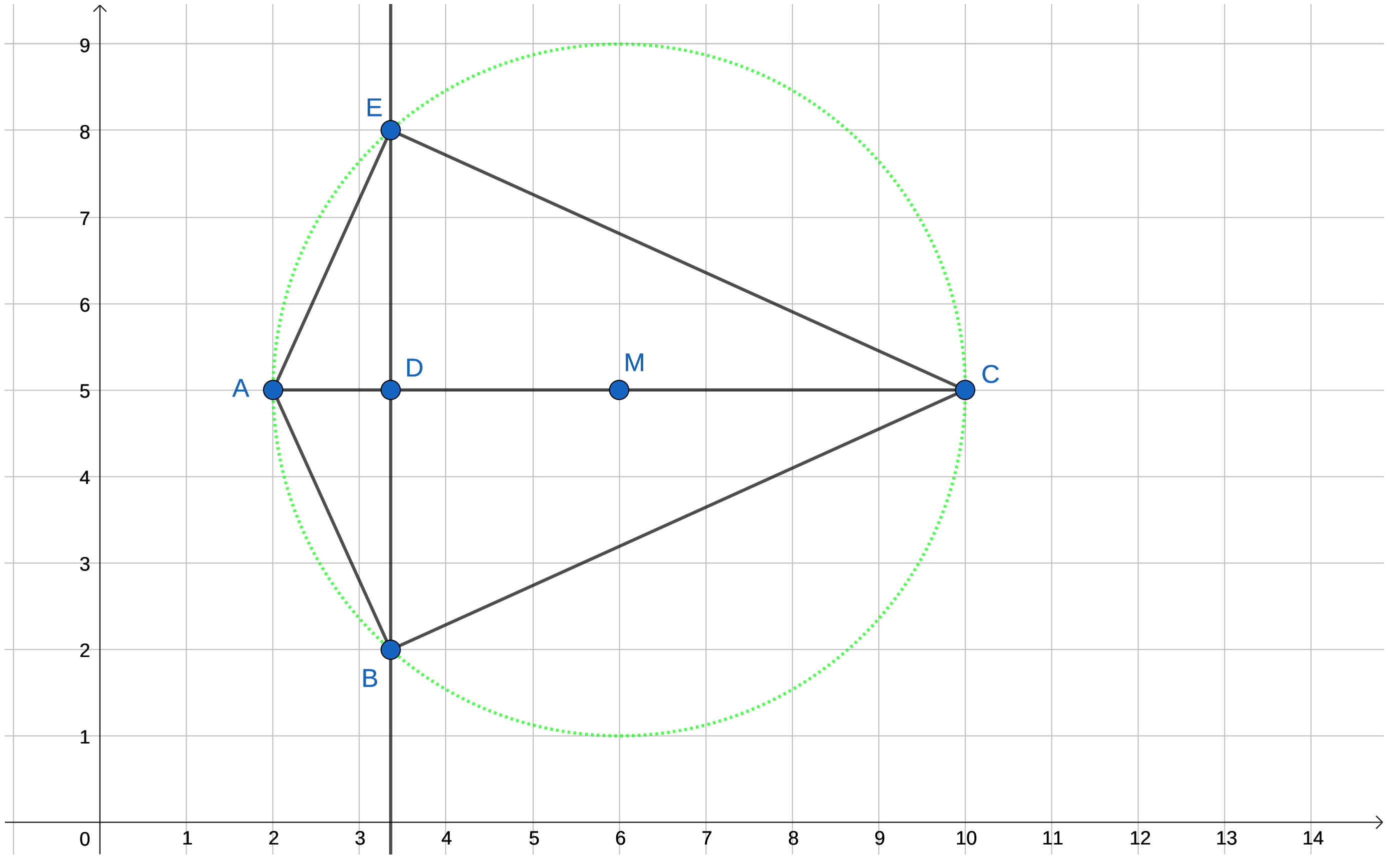
مسألة 3

1 المسألة

ABC مثلث قائم في B . النقطة M هي منتصف $[A,C]$. المستقيم (B,D) يعامد المستقيم (A,C) . النقطة E هي نظيرة النقطة B بالنسبة للنقطة D . برهن أن الرباعي $ABCE$ دائري.

2 الشكل



3 مدخلات البرنامج

3.1 معطيات المسألة

المعطيات الإقليدية
المثلث ABC قائم في B.
M هي منتصف القطعة المستقيمة [A,C].
(B,D) يعامد (A,C).
E نظيرة B بالنسبة لـ D.
مستقيم (A,D,M,C).

الوصف الكارتيزي/الديكارتي للشكل
النقطة A إحداثياتها (2,5).
النقطة B إحداثياتها (3.36,2).
النقطة C إحداثياتها (10,5).
النقطة D إحداثياتها (3.36,5).
النقطة E إحداثياتها (3.36,8).
النقطة M إحداثياتها (6,5).

3.2 السؤال

برهن أن الرباعي ABCE دائري.

4 ملاحظات

- في هذا المثال، المستقيم (A,D,M,C)تم تحديده لأنه في الحالة العامة يمكن أن تكون هناك أكثر من طريقة لرسم الشكل تؤدي لترتيب مختلف للنقاط في المستقيم.
- الدائرة ليست جزءا من المسألة، تم رسمها للتوضيح فقط.

5 البرهان

البداية

سنبرهن أن الرباعي ABCE دائري بإثبات أن زاويتين متقابلتين منه متكاملتان

1. نبرهن أن الزاويتين [A,B,C] و [A,E,C] متكاملتان

البداية

سنبرهن أن الزاويتين [A,B,C] و [A,E,C] متكاملتين بإثبات أن كلا منهما زاوية قائمة

1. نبرهن أن الزاوية [A,B,C] قائمة

البداية

سنبرهن أن الزاوية [A,B,C] قائمة بإثبات أنها الزاوية القائمة لمثلث قائم

البداية

من المعطيات نعلم أن المثلث ABC قائم في الرأسB

النهاية

إذن: الزاوية [A,B,C] قائمة

النهاية

2. نبرهن أن الزاوية [A,E,C] قائمة

البداية

سنبرهن أن الزاوية [A,E,C] قائمة بإثبات أنها تتشكل من زاويتين متتامتين [C,E,D] و [A,E,D]

البداية

سنبرهن أن الزاويتين [C,E,D] و [A,E,D] متتامتان بإثبات أنهما تقايسان زاويتين متتامتين نبرهن تتامهما

1. نبرهن أن الزاويتين [C,E,D] و [C,B,D] متقايستان

البداية

سنبرهن أن الزاويتين [C,E,D] و [C,B,D] متقايستان بمقارنة (حالة ضلعين و زاوية بينهما) المثلثين CDE و BCD المثلثان CDE و BCD فيهما:

1. نبرهن أن القطعتين المستقيمتين [C,D] و [C,D] متقايستان

البداية

القطعتان المستقيمتان متطابقتان

النهاية

2. نبرهن أن القطعتين المستقيمتين [D,E] و [B,D] متقايستان

البداية

من المعطيات، النقطة E هي نظيرة النقطة B بالنسبة للنقطة D
النهاية
3. نبرهن أن الزاويتين [C,D,E] و [B,D,C] متقايستان
البداية
الزاوية [B,D,C] هي نفسها الزاوية [B,D,M]
سنبرهن تقايس الزاويتين [B,D,M] و [C,D,E]
البداية
سنبرهن أن الزاويتين [C,D,E] و [B,D,M] متقايستان بإثبات أنهما قائمتان
1. نبرهن أن الزاوية [C,D,E] قائمة
البداية
سنبرهن أن الزاوية [C,D,E] قائمة بإثبات أنها تقايس الزاوية [A,D,B] التي نبرهن قيامها
1. نبرهن أن الزاوية [A,D,B] قائمة
البداية
سنبرهن أن الزاوية [A,D,B] قائمة بإثبات أنها تقايس الزاوية [B,D,C] التي نبرهن قيامها
1. نبرهن أن الزاوية [B,D,C] قائمة
البداية
الزاوية مشكلة من تقاطع مستقيمين متعامدين
النهاية
2. نبرهن أن الزاويتين [A,D,B] و [B,D,C] متقايستان
البداية
سنبرهن أن الزاويتين [A,D,B] و [B,D,C] متقايستان بإثبات أنهما قائمتان
1. نبرهن أن الزاوية [A,D,B] قائمة
البداية
الزاوية مشكلة من تقاطع مستقيمين متعامدين
النهاية
2. نبرهن أن الزاوية [B,D,C] قائمة
البداية
الزاوية مشكلة من تقاطع مستقيمين متعامدين
النهاية
إذن، الزاويتان [A,D,B] و [B,D,C] متقايستان
النهاية

إذن: الزاوية [A,D,B] قائمة
النهاية
2. نبرهن أن الزاويتين [C,D,E] و [A,D,B] متقايستان
البداية
الزاويتان [A,D,B] و [C,D,E] متقايستان لأنهما متقابلتان بالرأس
النهاية
إذن: الزاوية [C,D,E] قائمة
النهاية
2. نبرهن أن الزاوية [B,D,M] قائمة
البداية
الزاوية [B,D,M] قائمة لأنها نفسها الزاوية [B,D,C] و التي نعلم أنها قائمة من المعطيات
النهاية
إذن، الزاويتان [C,D,E] و [B,D,M] متقايستان
النهاية
إذن الزاويتان [B,D,C] و [C,D,E] متقايستان
النهاية
إذن:
المثلثان CDE و BCD متقايسان و بالتالي: الزاويتان [C,E,D] و [C,B,D] متقايستان
النهاية
2. نبرهن أن الزاويتين [A,E,D] و [A,B,D] متقايستان
البداية
سنبرهن أن الزاويتين [A,E,D] و [A,B,D] متقايستان بمقارنة (حالة ضلعين و زاوية بينهما) المثلثين ADE و ABD
المثلثان ADE و ABD فيهما:
1. نبرهن أن القطعتين المستقيمتين [A,D] و [A,D] متقايستان
البداية
القطعتان المستقيمتان متطابقتان
النهاية
2. نبرهن أن القطعتين المستقيمتين [D,E] و [B,D] متقايستان
البداية
من المعطيات، النقطة E هي نظيرة النقطة B بالنسبة للنقطة D
النهاية

3. نبرهن أن الزاويتين [A,D,E] و [A,D,B] متقايستان
البداية
سنبرهن أن الزاويتين [A,D,B] و [A,D,E] متقايستان بحساب فروق زوايا متقايسة
يتشكل المستقيم (A,M) من الزاويتين المتجاورتين: [A,D,B] و [B,D,M]
و يتشكل المستقيم (A,C) من الزاويتين المتجاورتين: [A,D,E] و [C,D,E]
زوجا الزوايا المتجاورة يشكلان زاويتين مستقيمتين متقايستين
بقي أن نبرهن أن الزاويتين [B,D,M] و [C,D,E] متقايستان
البداية
سنبرهن أن الزاويتين [C,D,E] و [B,D,M] متقايستان بإثبات أنهما قائمتان
1. نبرهن أن الزاوية [C,D,E] قائمة
البداية
سنبرهن أن الزاوية [C,D,E] قائمة بإثبات أنها تقايس الزاوية [A,D,B] التي نبرهن قيامها
1. نبرهن أن الزاوية [A,D,B] قائمة
البداية
سنبرهن أن الزاوية [A,D,B] قائمة بإثبات أنها تقايس الزاوية [B,D,C] التي نبرهن قيامها
1. نبرهن أن الزاوية [B,D,C] قائمة
البداية
الزاوية مشكلة من تقاطع مستقيمين متعامدين
النهاية
2. نبرهن أن الزاويتين [A,D,B] و [B,D,C] متقايستان
البداية
سنبرهن أن الزاويتين [A,D,B] و [B,D,C] متقايستان بإثبات أنهما قائمتان
1. نبرهن أن الزاوية [A,D,B] قائمة
البداية
الزاوية مشكلة من تقاطع مستقيمين متعامدين
النهاية
2. نبرهن أن الزاوية [B,D,C] قائمة
البداية
الزاوية مشكلة من تقاطع مستقيمين متعامدين
النهاية

إذن، الزاويتان [A,D,B] و [B,D,C] متقايستان
النهاية
إذن: الزاوية [A,D,B] قائمة
النهاية
2. نبرهن أن الزاويتين [C,D,E] و [A,D,B] متقايستان
البداية
الزاويتان [A,D,B] و [C,D,E] متقايستان لأنهما متقابلتان بالرأس
النهاية
إذن: الزاوية [C,D,E] قائمة
النهاية
2. نبرهن أن الزاوية [B,D,M] قائمة
البداية
الزاوية [B,D,M] قائمة لأنها نفسها الزاوية [B,D,C] و التي نعلم أنها قائمة من المعطيات
النهاية
إذن، الزاويتان [C,D,E] و [B,D,M] متقايستان
النهاية
نستنتج أن الزاويتين [A,D,B] و [A,D,E] متقايستان
النهاية
إذن:
المثلثان ADE و ABD متقايسان و بالتالي: الزاويتان [A,E,D] و [A,B,D] متقايستان
النهاية
3. نبرهن أن الزاويتين [C,B,D] و [A,B,D] متتامتان
البداية
سنبرهن أن الزاويتين [C,B,D] و [A,B,D] متتامتان بإثبات أنهما تشكلان زاوية قائمة
البداية
سنبرهن أن الزاوية [A,B,C] قائمة بإثبات أنها الزاوية القائمة لمثلث قائم
البداية
من المعطيات نعلم أن المثلث ABC قائم في الرأس B
النهاية
إذن: الزاوية [A,B,C] قائمة
النهاية

إذن: الزاويتان [C,B,D] و [A,B,D] متتامتان
النهاية
إذن: الزاويتان [C,E,D] و [A,E,D] متتامتان
النهاية
إذن: الزاوية [A,E,C] قائمة
النهاية
إذن: الزاويتان [A,B,C] و [A,E,C] متكاملتان
النهاية
2. بما أن مجموع أقياس زوايا الرباعي 360 درجة، و إذا علمنا أن [A,B,C] و [A,E,C] متكاملتان،
نستنتج أن مجموع قيسي الزاويتين المتبقيتين [B,A,E] و [B,C,E] هو 180 درجة أي أنهما متكاملتان أيضا
إذن، الرباعي ABCE دائري
النهاية